Γιάννης Πλατάρος

Η άπειρη πολλαπλασιαστική ανθυφαιρετική διαδικασία της αρμονία, στα σχόλια του Φιλολάου.

Ο Φιλόλαος στο Περὶ Φύσιος, fragment 6, γραμμές 16-24 υπολογίζει τους τέσσερις πρώτους όρους της ανθυφαίρεσης της αρμονίας :

ἁρμονί ας δὲ μέγεθό ς ἐ στι συλλαβὰ καὶ δι' ὀ ξειᾶ ν· τὸ
δὲ δι' ὀ ξειᾶ ν μεῖζον τᾶ ς συλλαβᾶ ς ἐ πογδό ωι. ἔ στι γὰρ
ἀπὸ ὑ πάτας ἐ πὶ μέσσαν συλλαβά, ἀπὸ δὲ μέσσας ἐ πὶ
νεάταν δι' ὀ ξειᾶ ν, ¢pÕ dὲ νε£taj ™j tr…tan sul l ab£, ἀπὸ
dὲ τρί τας ἐ ς Øp£tan di' ὀ ξειᾶ ν· τὸ δ' ἐ ν μέσωι μέσσας
καὶ τρί τας ἐ πό γδοον· ¡ dὲ συλλαβὰ ἐ πί τριτον, tÕ dὲ
δι' ὀ ξειᾶ ν ἡμιό λιον, tÕ di¦ pas©n dὲ διπλÒon. οὕ τως ἁρ-
μονί α πέντε ἐ πό γδοα καὶ δύ ο διέσιες, δι' Ñxei©n dὲ τρί α
ἐ πό γδοα καὶ δί εσις, sul l ab¦ dὲ δύ' ἐ πό γδοα καὶ δί εσις.

(i) Εμείς γνωρίζουμε ότι :

$2/1 = (3/2)^1 * 4/3$, με $4/3 < 3/2$

$3/2 = (4/3)^1 * 9/8$, με $9/8 < 4/3$

$4/3 = (9/8)^2 * 256/243$, με $256/243 < 9/8$

$9/8 = (256/243)^2 * 531441/524288$, με $531441/524288 < 256/243$

Η τελευταία αναλυτικότερα γράφεται :

$$3^2/2^3 = (2^8/3^5)^2 * 3^{12}/2^{19}$$

Συνεχίζοντας έχουμε :

$$2^8/3^5 = (3^{12}/2^{19})^3 * 2^{65}/3^{41}$$

Αρκεί $2^{65}/3^{41} < 3^{12}/2^{19}$

ή $2^{84} < 3^{53}$

ή $84 \log 2 < 53 \log 3$

ή $25.286 < 25.287$ ορθό

Έπειτα παίρνουμε :

$3^{12}/2^{19} = (2^{65}/3^{41})^{1} \times 3^{53}/2^{84}$

Αρκεί $3^{53}/2^{84} < 2^{65}/3^{41}$
ή $3^{94} < 2^{149}$
ή $94 \log 3 < 149 \log 2$
ή $44.849 < 44.853$, που ισχύει

Στο επόμενο βήμα :

$2^{65}/3^{41} = (3^{53}/2^{84})^{5} * 2^{485}/3^{306}$

Αρκεί $2^{485}/3^{306} < 3^{53}/2^{84}$
ή $2^{569} < 3^{359}$
ή $569 \log 2 < 359 \log 3$
ή $171.2860 < 171.2865$, αληθές

Συνεχίζοντας έχουμε :

$3^{53}/2^{84} = (2^{485}/3^{306})^{2} * 3^{665}/2^{1054}$

Πρέπει $3^{665}/2^{1054} < 2^{485}/3^{306}$
ή $3^{971} < 2^{1539}$
ή $971 \log 3 < 1539 \log 2$
ή $463.284 < 463.285$, το οποίο ισχύει

Συνολικά οι 8 πρώτοι όροι της (πολλαπλασιαστικής) ανθυφαίρεσης της αρμονίας είναι: [1,1,2,2,3,1,5,2,...]

(ii)

Από τις παραπάνω σχέσεις , για τα υπόλοιπα, έχουμε

$2^2/3 > 3^2/2^3 > 2^8/3^5 > 3^{12}/2^{19} > 2^{65}/3^{41} > 3^{53}/2^{84} > 2^{485}/3^{306} > 3^{665}/2^{1054}$

αυτά τείνουν στο λόγο 1/1. Όμως επειδή είναι της μορφής $2^{\kappa}/3^{\lambda}$ ή $3^{\kappa}/2^{\lambda}$ δεν θα γίνουν ποτέ ίσα με 1/1, αφού θα έπρεπε $2^{\kappa}=3^{\lambda}$ για κάποια κ, λ,

άτοπο , διότι 2, 3 πρώτοι και έκαστος ακέραιος έχει μοναδικό ανάπτυγμα σε γινόμενο πρώτων.
Επομένως, η ανθυφαίρεση της αρμονίας είναι άπειρη.